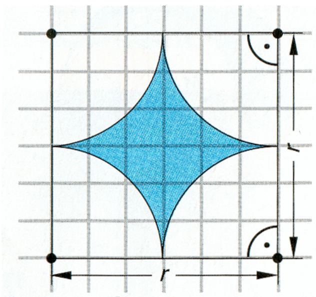
Aufgaben zu Kreisbogen und Kreissektor

1.0 Berechnen Sie die fehlenden Maße.

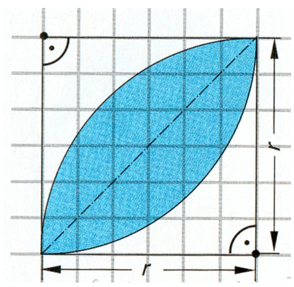
	1.1	1.2	1.3	1.4
Radius r in cm	12,45			12,8
Maß φ des Mittelpunktswinkels		150°	100°	34°
Bogenlänge b in cm		17,80		
Flächeninhalt A in cm²	60,87		87,27	

2.0 Berechnen Sie den Flächeninhalt der in den folgenden Bildern gerasterten Fläche für $r = 4$ cm.

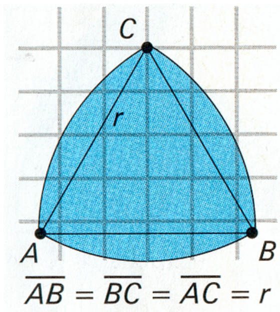
2.1



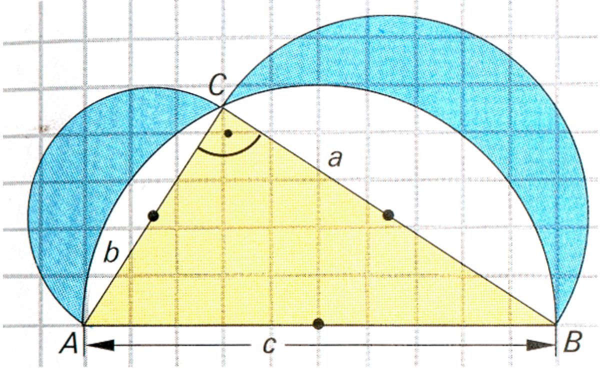
2.2



2.3

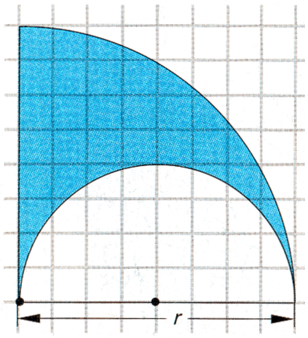


3 Zeigen Sie, dass die in folgender Figur dargestellten Halbmonde zusammen den gleichen Flächeninhalt haben wie das Dreieck ABC („Möndchen des Hippokrates“).
Rechnen Sie zuerst mit $a = 4$ cm, $b = 3$ cm und $c = 5$ cm und dann allgemein.

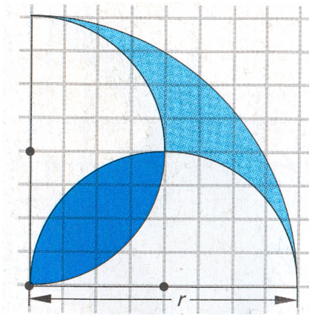


Jochen Weber

4 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die in folgender Figur gerasterte Fläche den gleichen Flächeninhalt wie der Halbkreis hat. Verwenden Sie dafür für den Radius r = 5 cm.

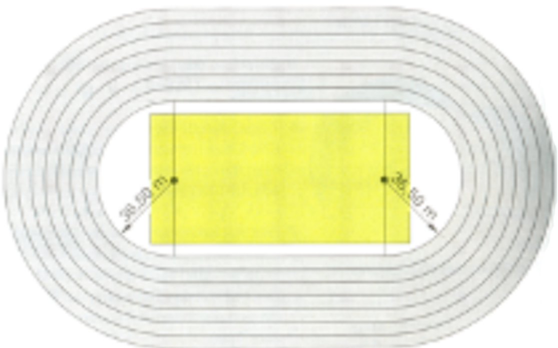


5 Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die beiden in folgender Figur gerasterten Flächen den gleichen Flächeninhalt haben. Verwenden Sie für den Radius r = 6 cm.



6 Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a = 50 cm werden vier gleich große Kreisscheiben mit größtmöglichem Radius ausgestanzt.
Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Abfall beträgt.

7.0 In einem Leichtathletikstadion beträgt der Radius des Innenbogens 36,50 m (siehe folgende Figur).



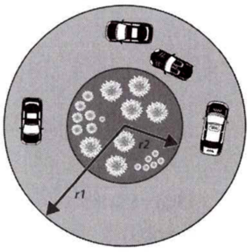
7.1 Ermitteln Sie, wie lange die geraden Teilstücke der Bahnen sein müssen, damit der Läufer auf der Innenbahn genau 400 m zurücklegt.
Hinweis: Für die Berechnung wird von einer gedachten Lauflinie ausgegangen, die 30 cm von der Innenkante der Bahn entfernt ist.

Jochen Weber

7.2 Bestimmen Sie, welche Kurvenvorgabe bei einem 400m Lauf der Läufer auf der sechsten Bahn erhalten muss (Eine Bahn ist jeweils 1,22 m breit).

7.3 Berechnen Sie, wie viele Meter ein Leichtathlet bei einem 10000m Lauf läuft, wenn er ständig die zweite Bahn benützt.

8.0 Ein Kreisverkehr soll eingerichtet werden. Der äußere Radius r_1 ist 16 m groß, der



innere Radius r_2 beträgt 5 m.

8.1 Bestimmen Sie, welcher Flächenbedarf für den gesamten Kreisverkehr erforderlich ist.

8.2 Ermitteln Sie, wie viele Pflanzen benötigt werden, wenn man den inneren Teil mit neun Pflanzen pro m^2 ausschmückt.

8.3 Berechnen Sie, welche Kosten entstehen, wenn für 1 m^2 Asphaltdecke 17,50 € berechnet wird.

Lösungen

1.0

	1.1	1.2	1.3	1.4
Radius r in cm	12,45	6,80	10,00	12,8
Maß des Mittelpunktswinkels	45°	150°	100°	34°
Bogenlänge b in cm	9,75	17,80	17,45	7,60
Flächeninhalt A in cm²	60,87	60,51	87,27	48,61

2.1 $A = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2 \cdot \pi = 16 - 4 \cdot \pi = 3{,}43\,\text{cm}^2$

2.2 $A = 2 \cdot \left(\frac{4^2 \cdot \pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 4^2\right) = 2 \cdot (4\pi - 8) = 8\pi - 16 = 9{,}13\,\text{cm}^2$

2.3 $A = 3 \cdot \frac{4^2 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{2}\sqrt{3} = 8\pi - 8\sqrt{3} = 11{,}28\,\text{cm}^2$

3

Fläche der Möndchen ergibt sich durch Berechnung der beiden Kreissektoren der Seite b (Radius 1,5 cm) und a (Radius 2 cm). Danach muss man die Fläche des großen Kreissektors bei Seite c (Radius 2,5 cm) abziehen und dann wieder die Fläche des Dreiecks ABC addieren.

$$\Rightarrow A_{\text{Möndchen}} = \frac{1}{2} \cdot (1{,}5)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot (2{,}5)^2 \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 =$$

$$= 1{,}125 \cdot \pi + 2 \cdot \pi - 3{,}125 \cdot \pi + 6 = 6 = A_{\text{Dreieck}}$$

Fläche der Möndchen ergibt sich durch Berechnung der beiden Kreissektoren der Seite b (Radius $\frac{b}{2}$) und a (Radius $\frac{a}{2}$). Danach muss man die Fläche des großen Kreissektors bei Seite c (Radius $\frac{c}{2}$) abziehen und dann wieder die Fläche des Dreiecks ABC addieren.

$$\Rightarrow A_{\text{Möndchen}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{4}\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{4}\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b =$$

$$= \frac{1}{8}\pi(b^2 + a^2 - c^2) + \frac{1}{2}\cdot a\cdot b = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b = A_{\text{Dreieck}}$$

$(b^2 + a^2 - c^2 = 0,$ da $c^2 = a^2 + b^2$ nach Pythagoras$)$

4

Flächeninhalt der gerasterten Fläche: $A = A_{\text{Sektor 1}} - A_{\text{Sektor 2}}$

$$A_{\text{Sektor 1}} = \frac{5^2\cdot\pi\cdot 90^\circ}{360^\circ} = 6{,}25\pi \qquad A_{\text{Sektor 2}} = \frac{(2{,}5)^2\cdot\pi\cdot 180^\circ}{360^\circ} = 3{,}125\pi$$

$$A = 6{,}25\pi - 3{,}125\pi = 3{,}125\pi$$

Flächeninhalt der gerasterten Fläche: $A = A_{\text{Sektor 1}} - A_{\text{Sektor 2}}$

$$A_{\text{Sektor 1}} = \frac{r^2\cdot\pi\cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}r^2\pi \qquad A_{\text{Sektor 2}} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\frac{1}{4}r^2\cdot\pi\cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}r^2\cdot\pi$$

$$A = \frac{1}{4}r^2\cdot\pi - \frac{1}{8}r^2\cdot\pi = \frac{1}{8}r^2\cdot\pi$$

5

Dunkler gerasterte Fläche:

$$A = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot(3)^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right) = 2\cdot(2{,}25\cdot\pi - 4{,}5) = 4{,}5\cdot\pi - 9$$

Heller gerastete Fläche:

Großer Viertelkreis minus zwei kleinere Viertelkreise minus Quadrat

$$A = \frac{1}{4}\cdot 6^2\cdot\pi - 2\cdot\frac{1}{4}(3)^2\,\pi - (3)^2 = 9\cdot\pi - 4{,}5\cdot\pi - 9 = 4{,}5\cdot\pi - 9$$

Dunkler gerasterte Fläche:

$$A=2\cdot(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2})=2\cdot(\frac{1}{4}\cdot\frac{r^2}{4}\cdot\pi-\frac{r^2}{8})=2\cdot(\frac{r^2}{16}\cdot\pi-\frac{r^2}{8})=$$

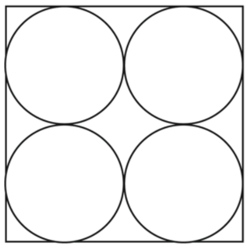
$$2\cdot\frac{1}{16}\cdot r^2(\pi-2)=\frac{1}{8}\cdot r^2(\pi-2)$$

Heller gerastete Fläche:

Großer Viertelkreis minus zwei kleinere Viertelkreise minus Quadrat

$$A=\frac{1}{4}r^2\pi-2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi-\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{1}{4}r^2\pi-\frac{1}{8}r^2\pi-\frac{r^2}{4}=\frac{1}{8}r^2\pi-\frac{1}{4}r^2=\frac{1}{8}\cdot r^2(\pi-2)$$

6



$$A_{Quadrat}=50^2=2500\,cm^2 \qquad A_{Kreise}=4\cdot 12{,}5^2\cdot\pi=1963{,}50\,cm^2$$

$$\Rightarrow A_{Abfall}=2500-1963{,}50=536{,}50\,cm^2$$

$$\Rightarrow \frac{536{,}50}{2500}=0{,}2146 \Rightarrow 21{,}46\%\ \text{Abfall}$$

7.1

$$b=\frac{2r\pi\cdot 180°}{360°}=r\pi=36{,}80\cdot\pi=115{,}61\,m$$

(36,80, weil 30 cm von Innenkante entfernt)

Länge der Rundbahn: 2 · Länge Bögen + 2 · Länge Geraden

$$\Rightarrow 400=2\cdot 115{,}61+2\cdot l \ \Rightarrow 2l=400-231{,}2=168{,}8 \ \Rightarrow l=84{,}4\,m$$

7.2

Radius des Bogens Bahn 6: $36{,}5+5\cdot 1{,}22+0{,}30=42{,}90\,m$

$\Rightarrow$ Bögenlänge: $b=42{,}90\cdot\pi=134{,}8\,m$

$\Rightarrow$ Läufer auf Bahn 6 legt $2\cdot 134{,}8+2\cdot 84{,}4=438{,}3\,m$ zurück

$\Rightarrow$ er muss 38,3 m Kurvenvorgabe erhalten

7.3

$10000\,\text{m}$ entspricht 25 Runden

$\text{Radius des Bogens Bahn 2}: 36,5 + 1,22 + 0,30 = 38,02\,\text{m}$

$\Rightarrow \text{Bogenlänge}: b = 38,02 \cdot \pi = 119,40\,\text{m}$

$\Rightarrow \text{Läufer legt also pro Runde } 2 \cdot 119,40 + 2 \cdot 84,4 = 407,7\,\text{m}$ zurück

$\Rightarrow \text{in 25 Runden legt er also } 25 \cdot 407,7 = 10192,2\,\text{m}$ zurück

8.1 Flächenbedarf: $16^2 \cdot \pi \approx 804,25\,\text{m}^2$

8.2

$A_{\text{innen}} = 5^2 \cdot \pi \approx 78,54\,\text{m}^2$

$78,54\,\text{m}^2 \cdot 9\,(\text{pro m}^2) \approx 706,86$

Es werden etwa 707 Pflanzen benötigt.

8.3

$A_{\text{Ring}} = 256 \cdot \pi - 25 \cdot \pi = 231 \cdot \pi \approx 725,71\,\text{m}^2$

Kosten: $725,71 \cdot 12,50 \approx 12699,93$ €